24

Dissertatio Academica
De
Computando Effectu Convexitatis Superficiei in Arte Libellandi,
Posita Figura Telluris Ellipsoidica.

Quam
Consensu Amplissimæ Facultatis Philosophicæ Aboënsis,
Præside
Mag. JOH. HENR. LINDQUIST,
Math. Prof. R. & O. atque R. Acad. Sc. Svec. Membro,

Pro Laurea
Publico Examini submittit
CAROLUS GUSTAVUS UTTER,
Stipend. Reg. Satacundensis.

In Auditorio Majori die IX Maji MDCCXCV,
Horis ante merid. consvetis.

ABOÆ,
TYPIS FRENCKELLIANIS.

§. I.

Vix ulla in universa Geometria practica occurrit operatio majorem postulans exactitudinem, quam, quæ in aquæductionibus præsertim summe necessaria est, ars sic dicta libellandi, cujus ope detegitur, an & quantum duorum locorum a se invicem distantium unus altero elevatior sit. Libellationes vero inprimis longiores, exquisitissima utcunque ratione institutæ, duplici semper egent correctione, una propter curvaturam, quam in atmosphæra nostra subeunt radii luminis, altera ob convexitatem ipsius superficiei terrestris; quæ quidem correctiones, ut diversis nituntur principiis, ita sigillatim de utraque disquirere convenientissimum videtur. Harum posteriorem præsenti Specimine Academico breviter examinare constituimus, regulas investigaturi, secundum quas in arte libellandi commodissime computari queat effectus variæ (pro diversa tam latitudine quam directione) curvaturæ superficiei, posita figura telluris ellipsoidica versus polos compressa, quam ut verisimillimam hic adsumimus hypothesin. In brevioribus quidem libellationibus hæc correctio convexitatis ut & refractioctionis plerumque contemni potest; quam ob caussam etiam ad has correctiones evitandas, quoties per longiores tractus libellatio extendenda sit, a quibusdam commendetur, majorem quamvis distantiam in minores portiones partiri & singulas harum seorsim libellare. Præterquam vero quod molestæ sint operationes adeo multiplicatæ, minores etjam errores ex indole instrumentorum & ex modo hæc tractandi prodeuntes atque vix evitabiles, per hanc repetitionem ita cumulantur, ut maximam sæpissime pariant incertitudinem. Nec semper occasio datur, libellationes, quod quidem maxime commendandum foret, ex utroque termino secundum directiones oppositas repetere.

§. II.

Primo dispiciendum nobis est, qua ratione in arte libellandi inveniatur effectus convexitatis superficiei, posita figura telluris perfecte sphærica. Si igitur in quavis operatione libellatoria sit v distantia inter locum ex quo, & terminum versus quem fit collineatio, atque huic distantiæ competens correctio convexitatis seu horizontis apparentis supra verum elevatio dicatur x; ex data v & cognita telluris semidiametro $= r$ investiganda erit x. Hic vero duo occurrunt casus, prout distantia illa v secundum horizontem aut verum aut apparentem mensurata detur. In utroque casu ut exacta obtineatur x, quærenda est primum amplitudo arcus circuli maximi sphæræ pro data v, quæ amplitudo dicatur z. In *Casu 1*, quo v designat

 distan-

distantiam secundum horizontem verum seu immediate in ipsa telluris superficie, inæqualitatibus quotquot adfuerint correctis, mensuratam, patet v esse ipsum arcum radio $= r$ descriptum, adeoque quum in scrupulis secundis desideretur z, (designante N numerum minutorum secundorum, quæ continet arcus circuli radio æqualis seu $N = 206264, 8.$) erit $z = \frac{Nv}{r}$. In *Casu II*, quo distantia v sumitur in plano horizontis apparentis, sicut fieri solet quando v per mensurationem trigonometricam determinatur, erit $tg\, z = \frac{v}{r}$, posito Sinu toto $= 1$. Inventa itaque amplitudine z, in utroque casu computari potest x secundum utramvis harum formularum:

A). $x = \frac{2r\, Sin\, \frac{1}{2} z^2}{Cos\, z}$, vel *B*). $x = r\, tgz\, tg\, \frac{1}{2} z$;

quarum veritas facillime evincitur. Evidens enim est, fore $\frac{x}{r} = Sec\, z - 1 = \frac{1}{Cos\, z} - 1 = \frac{1 - Cos\, z}{Cos\, z} =$

$\frac{2\, Sin\, \frac{1}{2} z^2}{Cos\, z} = \frac{2\, Sin\, \frac{1}{2} z\, Cos\, \frac{1}{2} z}{Cos\, z} \cdot \frac{Sin\, \frac{1}{2} z}{Cos\, \frac{1}{2} z} = \frac{Sin\, z\, Sin\, \frac{1}{2} z}{Cos\, z\, Cos\, \frac{1}{2} z} =$

$tg\, z\, tg\, \frac{1}{2} z.$

Potest etiam sine auxilio anguli z ex datis v & r inveniri x per sequentes series:

Cas. I: $x = \frac{v^2}{2r} + \frac{5}{24} \cdot \frac{v^4}{r^3} + \frac{61}{720} \cdot \frac{v^6}{r^5} + \frac{277}{8064} \cdot \frac{v^8}{r^7} +$ &c.

Cas. II: $x = \frac{v^2}{2r} - \frac{1}{8} \cdot \frac{v^4}{r^3} + \frac{1}{16} \cdot \frac{v^6}{r^5} - \frac{5}{128} \cdot \frac{v^8}{r^7} +$ &c.

Quo-

Quoties vero, ut semper fieri solet, v est $<$ 30000 hexaped. Svec. seu $z < 30'$, sine errore $\frac{1}{4}$ poll. geom. in utroque casu assumi potest: C). $x = \frac{v^2}{2r}$.

§. III.

Quas in §. præced. dedimus regulas pro computando effectu convexitatis in figura sphærica, eædem pro figura quavis alia itidem valent, dummodo loco semidiametri r sumatur radius osculi seu curvaturæ pro dato loco & data directione. Posita igitur figura telluris ellipsoidica, data semidiametro æquatoris $=$ a & semiaxi telluris $= na$, inveniendus est pro quovis casu hic radius. Notissimum vero est, in ellipsoide curvaturam variare non tantum pro diversa latitudine, verum etjam in uno eodemque loco pro diversa directione seu declinatione a meridiano. Sigillatim itaque primum considerandus nobis est iste casus, quo in directione ipsius meridiani seu versus meridiem vel septentrionem instituitur operatio. Si in hac directione pro data loci latitudine $= L$, dicatur radius osculi m; posito $n \, tg \, L = tg \, M$, erit $m = \frac{a}{n} \left(\frac{Sin\, M}{Sin\, L}\right)^3 =$ $n^2 a \left(\frac{Cos\, M}{Cos\, L}\right)^3$, cfr. *Diss. qua resolvuntur nonnulla problemata posita figura telluris ellipsoidica, Præside Cel.* M. J. WALLENIO *a* TH. MATTHEISZEN *Aboæ* 1767 edita §. 3; quæ formulæ, si in series evolutæ desiderentur, præbent:

 $m = n^2 a$

$$m = n^2 a \left(1 + \tfrac{3}{1} \frac{(1-n^2) \operatorname{Sin} L^2}{2} + \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(1-n^2)^2 \operatorname{Sin} L^4}{4} + \&c.\right.$$

Hinc si cum Cel. MALLET (*Mathem. Beskrifn. om Jordklotet* §. 28) assumanus $a = 3589141,2$ hexaped. Svec. & $n = \frac{199}{200}$, erit sub æquatore $m = n^2 a = 3553339,5$, sub polo vero $m = \frac{a}{n} = 3607177,1$, & sub 60° latitudine $m = 3593590,8$ hexaped. Sv. Adeoque pro distantia $v = 9000$ hexaped. sv. Correctio x in pedibus Svec. expressa foret sub Æquatore $= 68,39$, sub polo $= 67,37$, & sub 60° Lat. $= 67,62$; quod exemplum probat in majoribus libellationibus ex neglecta hac variatione curvaturæ errorem > 1 ped. Svec. oriri posse. Tantus vero error in hoc operationum genere non semper tolerari potest.

§. IV.

In loco etiam uno eodemque superficiei ellipsoidicæ diversa est curvatura pro diversa directione seu declinatione a meridiano. Hoc sub ipso Æquatore manifestissimum est, ubi scilicet libellatione instituta versus orientem vel occidentem, retentis prioribus denominationibus, est $r = a$, in directione vero ipsius meridiani est $r = n^2 a$, quarum quantitatum differentia 35800 hexaped. Sv. (§. 3.) excedit. Videndum igitur est, quomodo pro data latitudine $= L$ & dato angulo $= \varphi$, quo a meridiano declinat directio libellationis, in Ellipsoide inveniatur radius curvaturæ, qui pro hac directione sit $= \varrho$. Si ad datum istum locum normalis ad meridianum inter superficiem & axem Ellipsoidis intercepta dicatur k, atque per hanc normalem & punctum versus quod in libellando sit collineatio, ductum intelligatur planum (cujus itaque ad meridianum inclinatio $= \varphi$), erit hujus plani cum superficie ellipsoidica intersectio Ellipsis, cujus pro dato illo loco radius osculi est ϱ. Designante α semiaxem hujus Ellipseos transversum, (qui semper per punctum transit, in quo normalis k occurrit axi telluris) & β semiaxem illi conjugatum, ex iis quæ in edita superiori anno *Dissertatione de Sectionibus Ellipsoidicis* §. 6. demonstravimus, patet huic ellipsi, cum meridiano communem esse istam normalem k, & hanc ipsosque semiaxes α & β inveniri ope sequentium formularum:

$$1{:}o\ \mathrm{Tg}M = n\,\mathrm{Tg}L;\ 2{:}o\ \mathrm{Sin}\,\lambda = \mathrm{Cos}L\,\mathrm{Sin}\,\varphi;\ 3{:}o\ \mathrm{Tg}\,\mu = n\,\mathrm{Tg}\,\lambda;$$

$$4{:}o\ \mathrm{Sin}\,\gamma = \frac{(1-nn)\ \mathrm{Sin}\,M\ \mathrm{Sin}\,\mu}{nn};\ 5{:}o\ \beta = a\ \mathrm{Cos}\,\gamma;$$

$$6{:}o\ \alpha = \frac{a\ \mathrm{Cos}\,\gamma\ \mathrm{Sin}\,\mu}{\mathrm{Sin}\,\lambda};\ 7{:}o\ k = \frac{a\ \mathrm{Cos}\,M}{\mathrm{Cos}\,L} = \frac{a\ \mathrm{Sin}\,M}{n\ \mathrm{Sin}\,L}.$$

Hinc quum, ut ex Conicis constat, generatim sit $\varrho = \frac{\alpha^2 k^3}{\beta^4}$, datis a, n, L & φ, inveniri potest ϱ; & quidem commodissime nostro judicio hoc fiet, si prius pro dato isto loco quæratur (§. 3.) m seu radius curvaturæ secundum directionem meridiani. Hoc etenim invento, ob $m = \frac{n^2 k^3}{a^2}$, erit $\varrho = \frac{m\,a^2\,\alpha^2}{n^2\,\beta^4}$; unde

per

per formulas allatas facta debita reductione, atque ponendo compendii caussa $\sqrt{1-n} = q$ & $\frac{q}{n} = p$, obtinetur $\varrho = \frac{m(1 + p^2 Cos\, L^2)}{1 + p^2 Cos L^2 Cos \beta^2}$. Est autem $m(1 + p^2 Cos L^2) = k$; ergo $\varrho = \frac{k}{1 + p^2 Cos\, L^2\, Cos\, \phi^2}$, quae formula facile per Logarithmos computatur facto $p\, Cos L\, Cos \phi = tg\, \psi$; tum enim fiet $\varrho = k\, Cos\, \psi^2$. Ex his etiam formulis manifestum est, pro data Latitudine L maximum esse $\varrho = k$ existente $\phi = 90°$; sed minimum fore $\varrho = m$, quando est $\phi = 0$: Adeoque differentiam inter hos limites esse $= k - m = m\, p^2\, Cos\, L^2$, ex qua differentia pro dato quovis casu dijudicari poterit, utrum ad hanc variationem curvaturæ pro diversis directionibus attendere opus sit.

Et hæ quidem jam allatæ regulæ pro computando effectu convexitatis superficiei ellipsoidicæ sufficientem præbent exactitudinem, etiamsi distantia v ad integrum usque gradum extenderetur. Ad tantam vero distantiam vix unquam collineatio fieri potest, quamobrem etiam superfluum judicamus ulterius inquirere de aberratione circuli osculantis ab ipsa ellipsi, & de errore inde oriundo, quod quoties angulus ϕ est obliquus, normales ad utrumque terminum in diversis planis jaceant. Hi enim errores, ut sensibiles fiant, majores supponunt distantias, quam quæ in praxi libellationis unquam occurrent.